数理解析研究所講究録
144巻 1972年 16-34

三次元の双有理幾何学について

京大 理　藤木明

X, Yを、2次元の複素多様体とする。$f: X\to Y$を、surjective bimeromorphic morphismとする時、fは、σ-process有限回の積に分解できる。これが、曲面の双有理幾何学の中心的事実である。この事実により、次の基本的な結果が証明される。1. 曲面の正規(孤立)特異点の解消は極小なものに限れば一意である。2. Xをコンパクトな曲面とする。$P_n=\dim H^0(X, nK)$、(KはXの標準因子)とする時、次の(い)と(3)は同値である。(い)Xと双有理型同値な曲面の中に「極小」なものが唯1つ存在する。(3)Xが、代数的で、$\forall n\geq 0$に対し$P_n=0$が成りたつ。上の事実の証明の方法を直接3次元に拡張するだけでは、確定的な結果は何一つ得られないことをまず示そう。そのために記号と、基本的事実を述べよう。Xを複素多様体、Aを部分多様体とする時、$N_{A/X}$は、AのX内での~~正規~~法バンドルを表す。(1) $\sigma: X\to Y$を、点P (resp. 非特異曲線C)による3次元のmonoidal変換とし、$A=\sigma^{-1}(P)$ (resp. $\sigma^{-1}(C)$)とおく。この時~~非~~ Aは、

$\mathbb{P}^2$ (resp. C上の$\mathbb{P}^1$バンドル) に同型で, $N_{A/X} \cong -H_A$ (resp. $N_{A/X}|\sigma^{-1}(Q) = -H_{\sigma^{-1}(Q)}$, $Q \in C$) が成りたつ。ここで, $H_A, H_{\sigma^{-1}(Q)}$は, hyperplane bundle を表わす。

(2)逆に上のような, $\underbrace{A \subset X}_{\text{正規バンドル条件をみたす}}$ が存在すれば, XとAは, 1のような変換で, あるYから得られる。(3)(1)で$C \cong \mathbb{P}^1$としよう。$N_{C/Y} \cong mH_C \oplus nH_C$ $m \geq n$とすると, $A \cong \Sigma_{m-n}$。Σ_kは, degree kのHirzebruch surface.

(4). (3)で, $N_{A/X} \cong [-C^{\infty} + mf]_A$。ここで, C^{∞}, fは, 各々Aの∞-sectionとファイバー。

Lemma1 $A \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$かつ $N_{A/X} \cong [-D_A]$, (ここでDはAのdiagonal)

$\Longleftrightarrow$ $N_{C/Y} \cong (-H_C) \oplus (-H_C)$ //. これは, ~~(2)~~(3)(4)を組み合わせればよい。この時, (2)により, $\tau: X \to Z$, で, $\tau|X-A$は, 同型かつ $\tau|A$は, Aの, もう一方のファイバリングに~~沿って~~一致するものが存在する。$T = \tau \cdot \sigma^{-1}: Y \to Z$, $Z = T(Y)$と記す。以下証明は全部略証.

Lemma2 Xをコンパクト, Cを$\mathbb{P}^1$と同型な, submanifoldとする時, $N_{C/X} \cong \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$, $m \geq n \geq -1$なら, $\forall n$に対し $P_n = 0$. (ただし $\mathcal{O}(m) = mH_C$)

pf) adjunction formulaにより, X内の非特異曲線Cに対し, $\deg(K_X|_C) = \deg K_C + \deg N_{C/X}$。今, ある整数$n_0$に対し$P_{n_0} > 0$とする。$\deg N_{C/X} < -\deg K_C$とすれば, $\deg(n_0 K_X|_C) < 0$。すなわちCは$|n_0 K_X|$の, fixed component または, base locusに含まれる。ところが小平[1]により, もし, $\dim H^1(C, N_{X/C}) = 0$なら, vector space $H^0(C, N_{X/C})$でparametrizeされた, CのX内での変形族が存在する。C'とCと異る同じ族のnonsingular curveとする時やはり, $\deg(K_X|C') < 0$であるから, C'も, $|n_0 K_X|$のどのmemberのsupportにもはいっていることになる。今上の変形族が, Cの近

傍全部を動けば,これは不可能である. 従がって $P_n=0$ $\forall n$. lemma の条件より,上で述べた仮定がすべてでるからこの場合も $P_n=0$。

同様の議論を用いて,次のことも証明される。$f: X\to X'$ を, X' の正規孤立特異点 p の resolution とする。 $A=f^{-1}(p)$ とおく。

<u>lemma 3</u> C を A に含まれる curve で $\mathbb{P}^1$ と同型とする。 $N_{C/X}\cong \mathcal{O}(m)\oplus\mathcal{O}(n)$, $m\geq n$ とする時, $n<0$ が成りたつ。

3次元の場合が, hyperplane cut などによって2次元の場合に reduce できればよいが, なかなかそうはうまくいかない。

$f: X\to Y$ を,3次元多様体の bimeromorphic morphism とする. f の例外集合 S とは, f が,その点の近傍で biholomorphic でない点の集合である。 $T=f(S)$ とする。 $\dim S=2$ $\dim T\leqq 1$ である。 $f|_{X-S}: X-S \cong Y-T$ 。

<u>lemma 4</u> $\exists T'\subset T$: proper analytic subset, s.t. $f|_{X-f^{-1}(T')}: X-f^{-1}(T') \to Y-T'$ は, nonsingular curve を center とする, monoidal 変換の連続で得られる。

pf) まず T から $\dim f^{-1}(t)=2$ となる有限個の点 t_1, t_k を除く。 ~~$t\in T-\{t_i\}$~~ 次に T の有限個の特異点を除く。 t_0 を残りの任意の点とする。 t_0 の近傍で, Y の座標を (y_1, y_2, y_3), $y_3=0$ が T の local equation を与えるようにとる。この近傍を U とし, $V=f^{-1}(U)$ とする。 $y_3\cdot f$ は, $\pi^{-1}(U)=V$ から, unit disc $D=\{y_3\,|\,|y_3|<1\}$ への map を与える。(Bertini の定理より) $y_3\cdot f: (y_3\cdot f)^{-1}(D')\to D'$ は, maximal rank の map としてよい。ここで $D'=\{y_3\,|\,0<|y_3|<1\}$。 $g=y_3\cdot f$ とおくと,各

fibre $g^{-1}(S)$, $s\in D'$ は nonsingular surface で，$f|_{g^{-1}(s)}: g^{-1}(s) \longrightarrow U_s$ は，nonsingular surface の間の，bimeromorphic morphism である。ここで $U_s = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_3 = s\}$。従がって，$f|_{g^{-1}(s)}$ は，曲面の場合の結果によって，σ-process 有限回の積の形にかける。ところで才一種例外曲線の stability theorem [2] を，g に対して用いることにより，f は，$\bigcup_{s\neq 0} U_s$ 上，σ-process の積 $\times\, id_{D'}: g^{-1}(s)\times D' \longrightarrow U_s \times D'$ の形をとることが証明できるのである。 q.e.d.

次に，nonsingular center の monoidal 変換に際しての submanifold の法バンドルの変化を調べる。

<u>lemma 5</u>　X：3次元多様体，A を非特異超曲面，C を A に含まれる非特異曲線。$\sigma: X_1 \to X$ を，C を中心とする monoidal 変換とする。$S = \sigma^{-1}(C)$ とする。この時，(☆) $N_{A_1/X_1} = \sigma^{*} N_{A/X} \otimes (N_{S/X_1})^{-1}$。ここで $A_1 = \sigma^{-1}[A]$。

Pf) A, S, A_1 の ideal の sheaf を $\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_S, \mathcal{I}_{A_1}$ で表わす時，$\sigma^{-1}(\mathcal{I}_A) = \mathcal{I}_S \cdot \mathcal{I}_{A_1}$ なる関係よりただちに lemma を得る。[(☆) $N_{A/X}, N_{S/X}$ をそれぞれ，$[A], [S]$ に訂正し，右辺は $(\sigma^{*}[A] \otimes [S]^{-1})_{A_1}$ とする。[ ] は diviso に対応する line bundle.]　上の証明で C は点でもよい。

<u>corollary 6</u>　i) $A \cong \mathbb{P}^2$ で C が degree d の curve，$N_{A/X} \cong l H_A$ とすると $N_{A_1/X_1} \cong (l-d) H_{A_1}$.　ii) $A \cong \mathbb{P}^2$ で C が 1 点，$N_{A/X} \cong l H_A$ とすると，$N_{A_1/X_1} \cong [lF + C_0]_{A_1}$　C_0 は A_1 の 0-section，F は fibre．$A_1 \cong \Sigma_1$ である．
iii)　$A \cong \mathbb{P}^1$-bundle over a curve で，C が A の general fibre と d 回まじわる curve とする．$N_{A/X}|_F = lF$ とする．$N_{A_1/X_1}|_{F_1} = (l-d)F_1$ である。ここで

F, F_1 は general fibre。

実は使えそうな事実は，lemma 2.3の帰結以外に，いまのところ見あたらないので，そこでの仮定はどちらを採用しても同じである。従って，$f_i: X_i \longrightarrow Y$ $i=1,2$ を，Y の正規孤立特異点$\underbrace{P\text{として}}_{\text{のresolution}}$，$f_1^{-1}f_2$ も $f_2^{-1}f_1$ も holomorphicではないと仮定しよう。
広中の結果により，X_2 に有限回非特異中心の monoidal 変換をほどこせば，$f_1^{-1}f_2$ の不確定点を除去することが可能である。
各 monoidal 変換を $\sigma_i: X_{i+1}\to X_i$ で表わす。$i=0,\cdots,r$. $X_0=X_2$ とする。
$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r: X_r\to X_0$ とする時，$f_1^{-1}f_2\cdot\sigma$ が X_r から X_1 への morphism となる。
σ_r の center を $C_r(\subset X_{r-1})$ で表わし，$A_r=\sigma_r^{-1}(C_r)$ とおく。混乱を回避するため，もとの X_1 を Z とおく。 $g=f_1^{-1}f_2\sigma: X_r\to Z$ とおく。

<u>Proposition 7</u> $A_r\cong \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ で，$^{(*)}$ $g|A_r$ は $\sigma_r|A_r$ と別の fibring, が，適当な条件で成立する。

pf) $\dim g(A_r)\geq 1$ としてよい。$\dim g(A_r)=2$ とする。まず，$g(A_r)$ が nonsingular としよう。すると $A_r\cong g(A_r)$ か，$A\cong\Sigma_1$ で，$g(A_r)\cong\mathbb{P}^2$ かのいづれかである。g^{-1} の不確定点の集合を T で表わす。$\dim T=1$ である。lemma 4 の T' は有限個の点であるから $g(A_r)\cong\mathbb{P}^1$-bundle あるいは $\cong\mathbb{P}^2$ に応じて，general ~~line~~ fibre F または，general line L は T' と交わらない。従がって lemma 4 により，F (resp. L) のある近傍 U で g は nonsingular curve を center とする monoidal 変換の succession とみてよい。
この時，$T\cap F=\phi$ なら $N_{g(A_r)/Z}|F=-H_F$。$T\cap F\neq\phi$ なら，corrolary 6 を用いて，$N_{g(A_r)/Z}|F=mH_F$ for some $m>0$ となる。前者の場合は

p.20の(2)により, $g(A_r)$ は contract しうる。すなわち $\tau: Z \to Z_1$ なる morphism が存在して, τ は $\tau(g(A_r))$ を center とする monoidal 変換である。Z_1 は Y の resolution であるからこれは仮定に矛盾する。後者の場合は lemma 3 によりおこりえない。$g(A_r)$ が singular の時は複雑であってとても, このままでは攻撃できそうもない。$\dim g(A_r)=1$ の時。

F を A_r の fibre とする時, $g(F)=g(A_r)$ としてよい。さもなければ X_{r1} が $X_1=Z$ を dominate するからである。これは $A_r \cong \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の時のみ可能である。(∵ $g(F)=g(A_r)$ より, $g(F)$ は rational. 再び lemma 4 を用いれば, $g(A_r)$ の一般点の逆像の既約成分は nonsingular rational であるから A_r は rational であることが結論される。Σ_r から curve C への holomorphic map を f とし fibre を F とする。Σ_r の ∞-section, fibre を C^∞_0, f とすると, $F \sim aC^\infty_0+bf$ と書ける。$\sim$ は linearly equivalent. $F^2=a^2r+2ab=0$ より $a\neq 0$ なら $ar+2b=0$ この時 $r\neq 0$ なら F は rational でない。) ~~もちろん $f: \Sigma_r \to C$ が $\mathbb{P}^1$ bundle~~ ☆ Proposition 7 の statement は従って仮定: $f_1: X_1 \to Y$ が minimal resolution かつ, $f_1^{-1}(P)$ の各既約成分が nonsingular. という条件のもとで成立する。// 一般に簡単な resolution では, この事実が成立する case が多いことに注意する。たとえば, g を $\mathbb{C}^3$ の自己同型で $g:(z_1, z_2, z_3) \mapsto (e_n z_1, e_n^p z_2, e_n^q z_3)$ $(n,p)=(n,q)=1$ で定義されるものとし, $G=\{g\}$ とする。$\mathbb{C}^3/G$ は原点の image を孤立特異点にもつ normal analytic space になる。$\mathbb{C}^3/G$ の resolution は上の性質を持つ。(修士論文参照)。 Prop. 7 で $g|A_r: A_r \to g(A_r)$ の fibre が connected

であること証明できる。いずれにせよ、これだけではなんの意味もないことである。次に A_{r-1} の X_r での proper transform $B=\sigma_r^{-1}[A_{r-1}]$ を調べよう。まず、σ_r の center $C_r\subset A_{r-1}$ の時を考える。A_r が $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ であったから、$C_r\cong\mathbb{P}^1$ で $N_{C_r/X_{r-1}}\cong\mathcal{O}(m)\oplus\mathcal{O}(m)$ $m<0$ である。A_{r-1} が $\mathbb{P}^2$ であるか、あるいは A_{r-1} が $\mathbb{P}^1$-bundle で C_r がその fibre なら このようなことはおこらないから (†)、A_{r-1} が Σ_m for some $m\geq 0$ と同型で C_r はその 0-section である。((†) 実際後者の場合なら $N_{C_r/X_{r-1}}\cong\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1)$ である。) この時

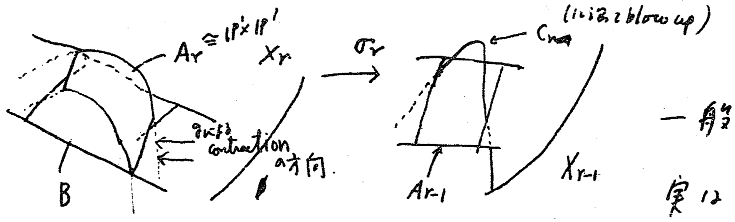
$0\to N_{C_r/A_{r-1}}\to N_{C_r/X_{r-1}}|_{C_r}\to N_{A_{r-1}/X_{r-1}}|_{C_r}\to 0$ なる exact sequence が成立する。

$N_{C_r/A_{r-1}}\cong\mathcal{O}(-m)$ である。さらに P.2 (A) により $N_{A_{r-1}/X_{r-1}}|_{C_r}\cong\mathcal{O}(\ell)$, $0<\ell<m$。このような場合、一般には、exact sequence は split しない。さて、resolution の例外集合 $f^{-1}(P)$ の既約成分は、nonsingular を仮定したから、$\dim g(B)\leq 1$ であるか、$B\cong\Sigma_1$, かつ $g(B)\cong\mathbb{P}^2$ のいずれかである。後者としよう。すると P5 の終りの議論と、ほぼ同様にして矛盾が生じる。$\dim g(B)=1$ とする。$B\cong\Sigma_m$ で、$B\cap A_r$ は B の 0-section であるから、$r\neq 0$ なら B は 1 点に contract せざるを得ない。これは矛盾である。

<u>Proposition 8</u> ☆の仮定と上の記号で $g(B)$ は 1 点である。

pf) $C_r\subset A_{r-1}$ は上で見た。$C_r\cap A_{r-1}$ が有限個の点とする。この時 B は有限個の例外曲線を持つ ruled surface である。この時、仮定☆より容易に、$\dim g(B)=2$ なら $C_r\cap A_{r-1}$ は 1 点であることが結論できる。再び P5 末の議論により矛盾が生じる。$\dim g(B)=1$ とすると Prop 7 より、B は $A_r\cap B$ の連結成分の上への fibre structure を

もつ。下図。この時, P.6の中程と同様にしてBはrational.



lemma 4により, $g(A_r)$の一般点のfibreはtreeだから, 実は $C_r \cap A_{r-1} = 1$点. この点で, C_rとA_{r-1}がtransversalに交わっていれば, BはΣ_rの1点でquadratic transformationして得られるsurfaceで, そのような曲面では, もとのfibreのproper transform以外には, selfintersection numberが0のcurveは存在しない。従ってこの場合も除外し得た。

lemma 9. C_rがA_{r-1}に, 点Pでk次のorderで接する時, Bは, $B\cap A_r$の1点において, 特異点をもつ。この点は, rational double point A_{k+1}と同型である。pf) Pの近傍で, X_{r-1}の局所座標x, y, zを $z^k=y$が, A_{r-1}のlocal equation. $x=0$, $y=0$がC_rのlocal equationになるようにとれば, Bの特異点は$z^k=(y/x)x$で与えられ, これはrational double point A_{k+1}の方程式である。q.e.d.

さてこの時, rational double pointのresolutionがselfintersection=−2のnonsingular rational curveのtreeで~~resolutionできる~~できるということ, を使って ~~$B\cap A_r$~~ この場合も矛盾を導くことができる。q.e.d.

問10. $\dim g(B)=0$から矛盾を生じるか? これが矛盾なら, nonsingular surfacesのsystemでresolutionできる, normal (isolated) singularityに関しては, それぞれのsurfaceの中に, lemma 1.をみたす$\mathbb{P}^1$が, 存在するかしないかによって, minimal resolutionかどうかが判定

できることになるだろう。$\dim g(B)=0$ なら，すでにみたように，$C_r \subset A_{r-1}$ であることに注意しておく。1つの例をあげよう。$A_{r-1} \cong \Sigma_1$ とすると，$N_{A_r/X_r} = [-D_{A_r}]$ であることがわかり．(lemma 1)．A_r は別の方向に contract できる。lemma 1 のすぐあとの記号を用いて $T(A_r) = C_r'$，$T(B) = B'$ とおく。$C_r' \cong \mathbb{P}^1$，$B' \cong \mathbb{P}^2$ で，$N_{B'/Z} \cong -H_{B'}$ がわかる。$N_{C_r'/Z} \cong (-H_{C})\oplus(-H_{C})$ である。B' の contraction を，$T_1: Z \to Z_1$ とし，$C_r'' = T_1(C_r')$ とおく。

<u>lemma 11</u>　一般に X: 3-fold，$\mathbb{P}^1 \subset X$，$N_{\mathbb{P}^1/X} \cong \mathcal{O}(m)\oplus\mathcal{O}(n)$ $\substack{n \le m < 0 \\ \text{or } n=m=0}$ とする時，$\sigma: X_1 \to X$ を，$\mathbb{P}^1$ の点 P における monoidal 変換とする。X_1 における $\mathbb{P}^1$ の proper transform を C_1 とする時，$N_{C_1/X_1} \cong \mathcal{O}(m-1)\oplus\mathcal{O}(n-1)$．

pf) $\mathbb{P}^1$ を含み，そこで互いに transversal に交わる surface E_1, E_2 が；$\mathbb{P}^1$ の近傍に存在し，$N_{\mathbb{P}^1/E_1} \cong \mathcal{O}(m)$．$N_{\mathbb{P}^1/E_2} \cong \mathcal{O}(n)$．をみたす。$\sigma^{-1}[E_1]$ と $\sigma^{-1}[E_2]$ が，C_1 で transversal に交わる nonsingular surface となるから，$N_{C_1/X_1} \cong N_{C_1/E_1'} \oplus N_{C_1/E_2'}$，$E_i' = \sigma^{-1}[E_i]$　$i=1,2$．である。あとは曲面論である。q.e.d.

　この lemma を用いれば $N_{C_r''/Z_1} \cong \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}$ であって，lemma 3 に矛盾。したがって上のような場合はおこりえない。　一般に $g(B)$ は nonsingular とはいえないが，$g(B)$ が nonsingular の この法バンドル $N_{g(B)/X_1}$ を調べることは意味があるだろう。すなわち　問 $g: X \to X_1$ を，birational morphism，$\mathbb{P}^1 \subset X$．$g(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^1$ とする時，$N_{\mathbb{P}^1/X}$ と $N_{g(\mathbb{P}^1)/X_1}$ を較べよ。

$\boxed{\text{四}}$ さてよく似た問題でより一層重要な問題は，birational map の monoidal 変換への分解可能性の問題である：$f: X \to Y$ を，3次元の birational map とする時，monoidal 変換の successions，

$\sigma_i: X_i \to X_{i-1}$, $\tau_j: Y_j \to Y_{j-1}$ $i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$ $X_0=X$ $Y_0=Y$ $X_m=Y_n=Z$ が存在して、$\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_m$, $\tau=\tau_n\cdots\tau_1$ とおく時、$f\sigma=\tau$ が成りたつか。

この問題についても、上と同様の考察がいろいろできるが、これについては、触れないことにして、例を示そう。

$\mathbb{C}^3=\mathbb{C}^3(x,y,z)$ とし、C を、$\mathbb{C}^3$ で $x=0$ $f(y,z)=0$ で定義される (plane) curve とする。$\sigma: X\to\mathbb{C}^3$ を C に沿う monoidal 変換とする時、X は、$\mathbb{C}^4$ で $xt=f(y,z)$ で定義される孤立特異点 P を持つ。点 P の resolution を $\sigma_1: X_1\to X$ を点 P の resolution とする。$\sigma\sigma_1: X_1\to\mathbb{C}^3$ は一般には、monoidal 変換の succession では得られない、birational morphism となる。

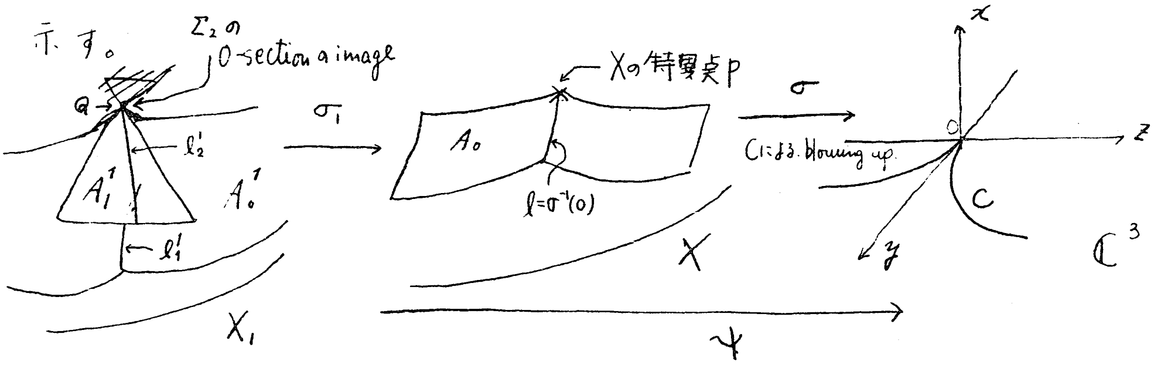
今 $f(y,z)=y^2+z^d$ $d=2k+1$ として、$\sigma\sigma_1$ が上の意味で monoidal 変換に分解できることを示そう。($d=2k$ の時は、$\sigma\sigma_1$ 自身が monoidal 変換に分解する。) まず X_1 の resolution。

lemma 12. $x^2+y^2+z^2+u^d=0$ $d=2k+1$ で定義される孤立特異点は、点中心の monoidal 変換を k 回繰り返すことにより ~~得る~~ resolution できる。$\varphi:\hat{X}\to X$ を、resolution とする。P を特異点、$\varphi^{-1}(P)=\bigcup_{i=1}^{k}\Theta_i$ とする。ここで Θ_i は、i 番目の monoidal 変換により得られる曲面とする。この時、$\Theta_i\cong\Sigma_2$, $i=1,\cdots,k-1$. $\Theta_k\cong$ (Σ_2 の 0-section を contract した surface)。$N_{\Theta_i/\hat{X}}|_{F_i}=-2H_{F_i}$。$F_i$ は Θ_i の general fibre。$\Theta_i\cap\Theta_{i+1}$ $i=1,\cdots,k-1$ は、Θ_i の 0-section、Θ_{i+1} の ∞-section。

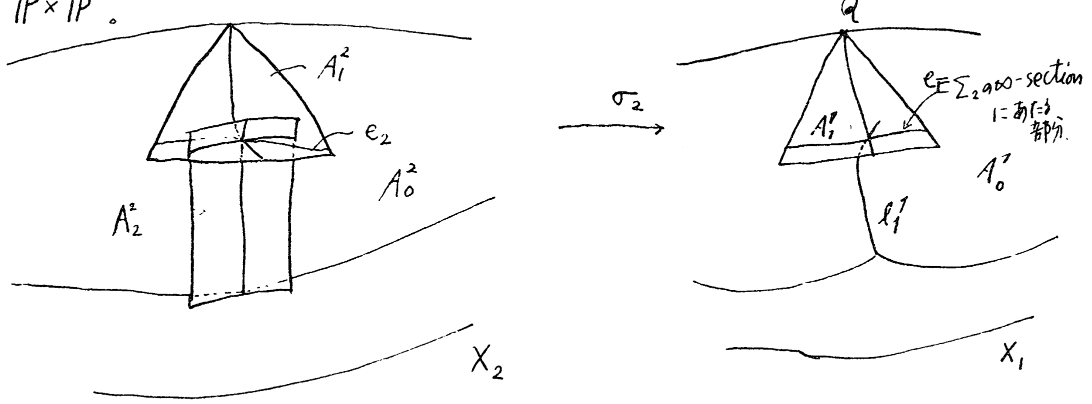
証明は direct computation によるので省略。

lemma により、上で $f(y,z)=y^2+z^d$, $d=2k+1$ とした時、$\sigma\sigma_1: X_1\longrightarrow\mathbb{C}^3$

が完全にわかる。 まず $d=3$ とする。 $\psi=\sigma\sigma_1$ とおく。 $\psi^{-1}(C)=A_0^1 \cup A_1^1$ とする。ここで A_0^1はCの proper transform, A_1^1は上記号で X の特異点の resolution σ_1 の例外曲面. 従がって $A_1^1\cong\Sigma_2/\text{0-section}$。 これを図で示す。

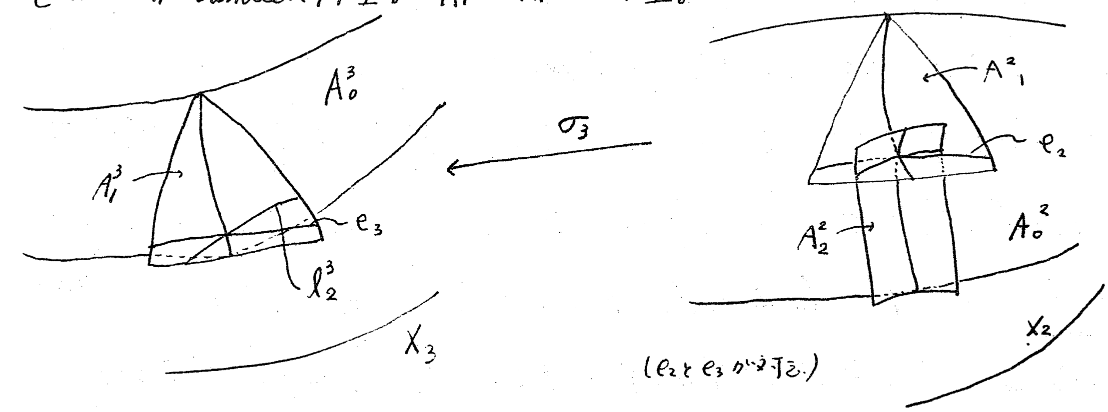


Xの特異点Pの記述: ある affine open において $xt=y^2+z^3$ で定義されている。 Qの近傍で X_1: $\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{t}{z}\right)=\left(\frac{y}{z}\right)^2+z$　A_1: $z=0$. $\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{t}{z}\right)=\left(\frac{y}{z}\right)^2$。 $l_1^1=\sigma_1^{-1}[l]$ とする。 $\sigma_2: X_2\longrightarrow X_1$ を l_1 に沿っての monoidal 変換とする。 $A_1^2=\sigma_2^{-1}[A_1^1]$, $A_0^2=\sigma_2^{-1}[A_0^1]$ $A_2^2=\sigma_2^{-1}[l_1]$ とする。(一般に A_i^kは, $\sigma_k^{-1}[\cdots\sigma_{i+1}^{-1}[A_i^i]]\cdots]$, すなわち, A_i^iの X_k における proper transform を表わす。ただし $k>i$。) さて、この時, $A_0^2\rightarrow A_0^1$ は非特異化, A_1^2は, 第1種例外曲線を含む。 $A_2^2\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。

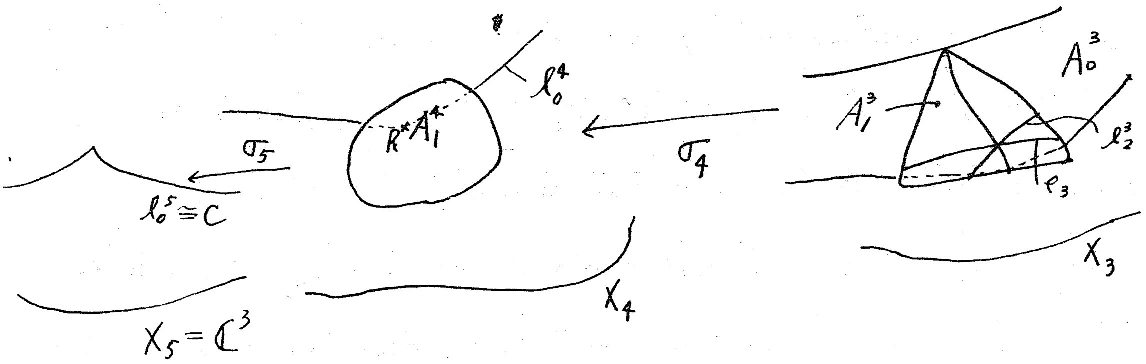


この時, A_2^2は もう1方のファイバリングの方へ contractible。

$\sigma_3: X_2 \to X_3$ をこの contraction とする。$\sigma(A_2^2)=\ell_2^3$ とする。この時 A_0^3 は、C 上の $\mathbb{P}^1$-bundle に同型。A_1^3 は A_1^2 と同型。



この時 A_0^3 が自然にファイバー方向に contractible。contraction を $\sigma_4: X_3 \to X_4$ とする。$\sigma_4(A_0^3)=\ell_0^4$ とする。この時 $A_1^4 \cong \mathbb{P}^2$。



この時、A_1^4 が contractible で、contraction を $\sigma_5: X_4 \to X_5$ とする。
この時、$\sigma\sigma_1\sigma_2 = \sigma_5\sigma_4\sigma_3$ が成り立つ。つまり $\sigma\sigma_1 = \psi = \sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2^{-1}$ というふうに monoidal 変換に分解できた。$d=5$ にすると少し違った situation が出現するが、これらを説明すると徒に紙数を費やすので、結果だけ述べる。P.10の記号を用いて $\sigma\sigma_1=\psi$ とおく。

<u>Proposition 13.</u> P.10でさらに $f(x,y)=x^2+y^d$ とおく。この時 $\psi_d=\sigma\sigma_1$ とおこう。すると ψ_d は、monoidal変換に分解できる。d は任意。

さらに一般に、isolated singularity $xy = z^a + u^b$ a, b 整数 $\geqq 2$.
の非特異化を構成することも可能である。(修論参照) $f_{(z,u)} = z^a + u^b$
とおいて、ψ の monoidal 変換を実験してみてもおもしろいだろう。

回 $f: X \to Y$ を3次元の birational morphism とする。最初に述べた(意味での) monoidal 変換への分解ができないことは、たとえば、P.11 の ψ などがその例であるが、f^{-1} の fundamental point が、Y の1点 P、あるいは非特異曲線 C であるとして、f が、Y の、P あるいは C を center とする monoidal 変換を dominate するか？という問題が生じる。まず、1点 P の場合に反例をあげよう。$Y = \mathbb{C}^3$, $\sigma_1: Y_1 \to Y$ を原点での blowing up とする。

反例　birational morphism $f: X \to \mathbb{C}^3$ で $f|_{X - f^{-1}(0)}: X - f^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^3 - \{0\}$ をみたしかつ、$\sigma_1^{-1} f: X \to Y_1$ は dominating でないものが存在する。

いささか繁雑であるがこれを正確に述べよう。

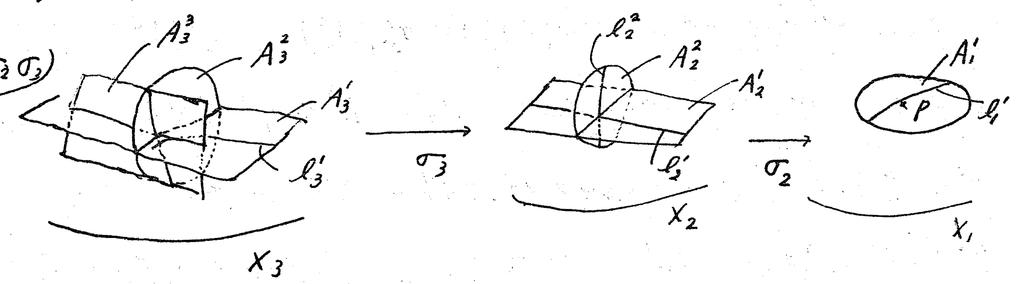
(1) 上の記号でさらに、$A_1^1 = \sigma_1^{-1}(0)$ とおく。$A_1^1 \cong \mathbb{P}^2$, $N_{A_1^1/Y_1} \cong -H_{A_1^1}$ である。
$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(z_1, z_2, z_3)$ とする。$z_1 = 0$ で定義される plane を E_0 とし、Y_1 でのその proper transform を E_1 とする。$E_1 \cap A_1^1$ は A_1^1 の line である。これを l_1^1 とする。$N_{l_1^1/E_1} = -H_{l_1^1}$ である。P を l_1^1 上の任意の点とする。

(2) $\sigma_2: Y_2 \to Y_1$ を点 P における monoidal 変換とする。$A_2^2 = \sigma_2^{-1}(P)$ とすると、
$A_2^2 \cong \mathbb{P}^2$, $N_{A_2^2/X_2} \cong -H_{A_2^2}$ である。A_1^1 の proper transform $\sigma_2^{-1}[A_1^1]$ を A_2^1 とおく。
$A_2^1 \cong \Sigma_1$ である。$\sigma_2^{-1}[l_1^1] = l_2^1$ とすると、l_2^1 は A_2^1 の fibre である。$N_{A_2^1/X_2}|_{l_2^1} \cong -2H_{l_2^1}$ である。(pf) $\sigma_2^{-1}[E_1] = E_2$ とする。$l_2^1 \subset E_2$ である。$\sigma_2|_{E_2}: E_2 \longrightarrow E_1$ は、点 $P \in E_2$ における monoidal 変換である。従って $N_{l_2^1/E_2} = -2H_{l_2^1}$ である。

E_2はl_2'でtransversalにA_2'に交わるから，$N_{A_2'/X_2}|l_2' \cong N_{l_2'/E_2} = -2H_{l_2'}$である。)

(3) $E_2 \cap A_2^2 = l_2^2$とする。l_2^2はA_2^2上のlineである。$\sigma_3: Y_3 \longrightarrow Y_2$を$l_2^2$をcenterとするmonoidal変換とする。$A_3^3 = \sigma_3^{-1}(l_2^2)$とする。$A_3' = \sigma_3^{-1}[A_2']$とおく。$\sigma_3|A_3': A_3' \longrightarrow A_2'$は$p_2 = A_2' \cap l_2^2$によるmonoidal変換である。$\sigma_3^{-1}[l_2'] = l_3'$とする。$p_2 \in l_2'$だから，$N_{l_3'/A_3'} = -H_{l_3'}$である。また$N_{A_3'/X_3}|l_3' = -2H_{l_3'}$である。(pf). $E_2 \supset l_2'$であった。$\sigma_3^{-1}[E_2] = E_3$とおくと，E_3はA_3'とl_3'でtransversalに交わる。$\sigma_3|E_3: E_3 \to E_2$は$\sigma_3$のcenter l_2^2がE_2に含まれているからisomorphismである。従って$N_{A_3'/X_3}|l_3' = N_{l_3'/E_3} = N_{l_2'/E_2} = -2H_{l_2'} = -2H_{l_3'}$.) また$N_{l_3'/X_3} \cong (-H_{l_3'}) \oplus (-2H_{l_3'})$である。(pf) l_3'においてA_3'とE_3がtransversalに交わり両方ともnonsingularであるから，$N_{l_3'/X_3} = N_{l_3'/A_3'} \oplus N_{l_3'/E_3} = (-H_{l_3'}) \oplus (-2H_{l_3'})$)

(4) $\sigma_{23} = \sigma_2\sigma_3$) とおく。



$l_1' \subset A_1' \subset X_1$, $\sigma_{23}^{-1}[l_1'] = l_3'$であった。$\sigma_4: X_4 \longrightarrow X_3$を，$l_3'$をcenterとするmonoidal変換とする。$\sigma_4^{-1}[l_3'] = A_4^4$とおくと，(3)の最後から$A_4^4 \cong \Sigma_1$. $A_4' = \sigma_4^{-1}[A_2']$とおくと$l_4' = A_4' \cap A_4^4$は，やはり(3)の最後の事実より$A_4^4$の0-sectionである。(3)における議論と同様に，

$N_{l_4'/X_4} = N_{l_4'/A_4'} \oplus N_{l_4'/A_4^4} = (-H_{l_4'}) \oplus (-H_{l_4'})$

(5) $\sigma_{234} = \sigma_2\sigma_3\sigma_4: Y_4 \longrightarrow Y_1$とする。$l_4' = \sigma_{234}^{-1}[l_1']$である。$\sigma_5: Y_5 \longrightarrow Y_4$を

l_4'をcenterとするmonoidal変換とし，$\sigma_5^{-1}[l_4']=A_5^5$とおくと，lemma1より $A_5^5\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。$p_i:\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$, $i=1,2$ を1st factor, 2nd factorへの射影とする。σ_5によりinduceされる，A_5^5のfibre structureが，p_1に一致するとする。この時P.2により，birational morphism $\sigma_5': Y_5\to Y_5'$が存在し，$\sigma_5'|_{Y_5-A_5^5}$ $Y_5-A_5^5\simeq Y_5'-\sigma_5'(A_5^5)$ かつ $\sigma_5'|A_5^5: A_5^5\to\sigma_5'(A_5^5)$ が p_2と一致する。~~が~~ $l'=\sigma_5'(A_5^5)$とおく。

(6) $f: Y_5'\to\mathbb{C}^3$へのbirational morphismで，$f\cdot\sigma_5'=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$なるものが存在することは明らかである。birational map $g: Y_5\to Y_1$ $g=\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\cdot\sigma_5'^{-1}$で定義すれば，$g$により$l'$の各点と，curve l_2'が対応する。すなわち$g: Y_5'\to Y_1$はdominatingでない。$g=\sigma_1^{-1}f$であるから $f: Y_5'\to\mathbb{C}^3$が求めるexampleである。

(7) $f^{-1}(0)=\sigma_5'(A_5^1)\cup\sigma_5'(A_5^2)\cup\sigma_5'(A_5^3)\cup\sigma_5'(A_5^4)$。$\sigma_5'(A_5^l)=B^l$ $l=1,2,3,4$ とする。$B^1\cong\Sigma_2$ $N_{B^1/Y_5'}|_{F^1}\cong-2H_{F^1}$ $B^2\cong\mathbb{P}^2$ $N_{B^2/Y_5'}\cong-2H_{B^2}$, B^3はΣ_2から2回σ-processを行って得られるsurface. $N_{B^3/Y_5}|_{F^3}\cong-H_{F^3}$ $B^4\cong\mathbb{P}^2$. $N_{B^4/Y_5'}\cong-2B^4$ である。// A_1'のproper transformがΣ_mになるものを構成することもできる。

$B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$のような奇妙な図形が点の連係として表われてくる以上，一般のbirational morphismに関しては，予想のたてようもない。

次にnonsingular curve Cが，birational morphism $f: X\to Y$の基本点になっている場合は，どうであろうか。C上に，$\dim f^{-1}(Q)=2$となる点がある場合には容易な(当然の)反例がある。今，$\dim f^{-1}(Q)=1$ $\forall Q\in C$とする。

<u>Theorem 1</u>　Yを$\mathbb{C}^3$の原点の近傍，CをYのcurveとする。Cの原点での既約成分の中に非特異なものC_0があれば，fは，C_0をcenterとするYのmonoidal変換をdominateする。($\dim f^{-1}(Q)=1$　$Q\in C$は仮定)

pf) $Y\subset\mathbb{C}^3$の座標を(x, y, z)，C_0が$x=y=0$で定義されているとする。$a=(a_0:a_1)\in\mathbb{P}^1$に対し，$a_0x+a_1y=0$で定義されるplaneを$E_a$，これと$z=0$との交線を$l_a$と書く。$|E_a|$を$a\in\mathbb{P}^1$のなすlinear systemとする。$\bar{E}_a=f^{-1}(E_a)$とし，$|\bar{E}_a|$のfixed componentを$F$とする。linear system $L=|\bar{E}_a|-F$のbase locus Bが空集合であることをみればよい。Lのgeneral memberは，$|E_a|$のgeneral memberのproper transform $\tilde{E}_a$である。まずlemma 4により，$Y-0$上ではfは，nonsingular centerのmonoidal変換のsuccessionsとしてよいから，$\tilde{E}_a\cap\tilde{E}_b\subset f^{-1}(0)$，が，$\tilde{E}_a$, $\tilde{E}_b$がgeneralの時，成立する。従がって特に$B\subset f^{-1}(0)$。　$f^{-1}(0)$の既約成分D_iがBに含まれる。$\longleftrightarrow$ $D_i\subset\tilde{E}_a$ for general $\tilde{E}_a$である。~~従がってBが有限個の点ならば，~~ 従がって$\tilde{E}_a\cap\tilde{E}_b=B$が，general $\tilde{E}_a$, $\tilde{E}_b$に対し成立する。(よって$B\neq\phi$なら$\dim B=1$。)　$\tilde{l}_a$をfによるl_aのproper transformとする。$f|\tilde{l}_a$: $\tilde{l}_a\to l_a$は，biholomorphic mapである。$\tilde{l}_a\cap S=R$とする。ここでSは，fの例外集合。$R\notin B$を示そう。この時$R\in f^{-1}(0)\cap\tilde{E}_a$から$B=\phi$がでる。実際$\tilde{E}_a\cap f^{-1}(0)=B$が成立するからである。(ここでもちろん$\tilde{E}_a$はgeneral member)　Rの近くでのlocal coordinate (u, v, w)を$u|\tilde{l}_a$が$\tilde{l}_a$のparameterとなるようにとる。この座標に関しfを$x=f_1(u,v,w)$　$y=f_2(u,v,w)$，$z=f_3(u,v,w)$と表わす。座標x, yをgeneralにとって，$x=t(u,v,w)g_1(u,v,w)$，$y=t(u,v,w)g_2(u,v,w)$，g_1, g_2は互いに素，とする時

g_1, g_2 は、点 R で同時に 0 にはならないことを示せばよい。この時、$g_1=0$ が $\hat{E}_a$ のの方程式に対応しているからである。さて $f|\hat{E}_a$ は $\hat{E}_a$ の parameter が x ととれる時、$x=t(u,0,0)\,g_1(u,0,0)$ となる。これが degree 1 の map を表すためには、$t(0,0,0)=0$ であるから $g_1(0,0,0)\neq 0$ でなければならない。 q.e.d.

さらに、ここで $t(u,v,z)=u+\cdots\cdots$ という展開をもつと考えてよい。すなわち S は R で nonsingular である。

<u>lemma 14</u> 逆に、$f^{-1}(0)\cap S$ に、S の nonsingular point R が含まれれば、C の既約成分に nonsingular なものが存在する。

pf) Koopman[3] により R の近傍の座標 (u,v,w) に関し、f は、次の形をとる。 $x=u^{s_1}$, $y=u^{s}\left(\sum_{k=0}^{\lambda} u^k h_k(w)+u^{\lambda}v\right)$ $z=w$ $s_1, s>0$ $\lambda\geq 0$ ここで $u=0$ が S の local equation になるとしている。従って $u=0$ の image は $x=0$ $y=0$ で定義される nonsingular curve である。

<u>lemma 15</u> 定理の仮定で C ~~の既約成分~~ が plane curve、すなわち $\mathbb{C}^3$ のある nonsingular hypersurface に原点の近傍で含まれるとする。この時、$f^{-1}(0)\cap S$ の点で S の nonsingular point でもあるものが存在する。

pf) C が $\mathbb{C}^3$ で $f_0(x,y)=0$, $z=0$ で定義されているとしてよい。$x=y=0$ で定義される line を l とする。$\hat{l}$ を l の proper transform とし $\hat{l}\cap S=R$ とする。R で S が non-singular であることが上と同様にして証明される。// lemma 14, 15 をあわせると、

<u>Theorem 1'</u>: Theorem 1 の C に関する仮定を「C を plane curve

とする」におきかえる。この時，C の既約成分に nonsingular なものが存在し，これを C_0 とする時，定理1の帰結が成立する。// もっと一般に

<u>lemma.16</u> 定理1の条件で，C は任意の curve とする。$\dim f^{-1}(Q)=1$ $\forall Q\in C$ なら，C の中に，非特異な成分 C_0 が存在する。

pf.) lemma14から，$f^{-1}(0)$ 上に，S の nonsingular point が存在することを言えばよい。$\dim f^{-1}(0)=1$ から，$R\in f^{-1}(0)$ で，$Y=\mathbb{C}^3$ の原点を通る2本の line l_1, l_2 の proper transform $\hat{l}_1, \hat{l}_2$ が，R を通るものがある。$0\in Y$ と $R\in X$ の座標 (x, y, z), (u, v, w) を，l_1, l_2 が各々 $\overset{y}{\cancel{x}}=\overset{z}{\cancel{w}}=0$, $\overset{x}{\cancel{x}}=\overset{z}{\cancel{w}}=0$，$\hat{l}_1, \hat{l}_2$ が各々 $v=w=0$ $u=w=0$ で定義されるようにとる。さらに $^{(*)}u=v=0$ で定義される line は $z=0$ なる plane の proper transform に含まれないとしてよい。この時 f は $u=x$, $v=y$, $z=g(u, v, w)$ という形で与えられる。Weierstrass の予備定理が使えて，g は w に関して m 次の Weierstrass polynomial としてよい。$m>1$ だと，上の式から f が原点の近傍で，1対1でなくなる。よて $m=1$. この時，f は R の近傍で同型。R のとり方に反する これは条件(*)に矛盾したのである。書き忘れたが，この条件は C が plane curve の時には成立しない。plane curve の時は lemma15. q.e.d.

<u>corollary. 17</u> $\dim f^{-1}(Q)=1$ $\forall Q\in C$ なら，C は plane curve。

今まで，f を Y に関し local に考えてきた。これを global にするために.

<u>Definition.1</u> X, Y を複素多様体，$f: X\to Y$ birational morphism とする時，f が複合 monoidal 変換とは，$\forall x\in X$, $\forall y\in Y$ s.t. $y=f(x)$ に対し，近傍 $U_x\ni x$, $U_y\ni y$ と nonsingular complex manifolds U_i，その open subset V_i，V_i の nonsingular

submanifold A_i, $i=0,1,\cdots,r$ が存在し，$U_0 = U_y$, $U_r = U_x$ かつ U_i は U_{i-1} より A_{i-1} を center とする monoidal 変換で得られる。さらに，これを，$\sigma_i : U_i \longrightarrow U_{i-1}$ と考える時，$f|U_x = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots\cdots \sigma_r$ が成立する。この時を言う。

<u>Theorem 2</u>　$f : X \to Y$ を birational morphism．$\dim f^{-1}(Q) \leq 1$ $\forall Q \in Y$ とする。（f^{-1} の不確定点を C とする。）この時 f は，複合 monoidal 変換である。

証明は，C の特異点の近傍ごとに考えて今までの結果を寄せ集めればできる。

$\boxed{\text{訂正}}$ 1. シンポジウムで話した広中先生の例に関して center の surface が，非特異に contract するというのは誤りであった。ここに慎んで訂正します。実際 Ann. Math. Vol 75. P.196 の記号で，$E_0 \cong \mathbb{P}^2$; $N_{E_0/U_0'} = -2H_{E_0}$ であった。contract し得ないことは，Theorem 1 あるいは系.17 からもわかることである。

2. P.16～7 で $g|A_r : A_r \longrightarrow g(A_r)$ の fibre の連結性はまだできていなかった。あとの議論に支障はない。

3. P.9 5行目：$N_{B/Z} = -2H_{B'}$ であった。従って Z_1 は singular p't を持つ。この時下から8行目のように矛盾が生じるかどうか興味があるがわからない。

Reference：[1] Kodaira：Ann. Math. Vol. 75. [2] Kodaira：Amer. Jour. Math. 1963.
[3] Koopman：Bull. Amer. Math. Soc. 34　その他 [4] Aeppli　Comm. Math. Helv. 33
[5] Hopf　Comm. Math. Helv. 29　[6] Kuhlmann. Archiv. Math II　[7] Moišezon. Amer. Math. Soc. tr. 1968?　[8] Šafarevič and others. Algebraic surfaces.　[9] Zariski. Intro. to the problem of minimal models.